فريق الكرنك الحمراء التطوعي

اسم المحاضرة
- الفضاءات الشعاعية والفضاءات الجزئية

اسم الدكتور/ اسماعيل ادريس

RB HAMAK

التاريخ :
اسم المادة: رياضيات نظري

الفضاءات الشعاعية والفضاءات الجزئية :

Vector spaces and SUB spaces.

- نسمي كل مجموعة V غير خالية من الأشعة ومعرف عليها العمليتين :

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

بفضاء شعاعي إذا تحققت الشروط التالية :

① $u + v = v + u \quad : \forall u, v \in V$ (تبديلية)

② $u + v + w = (u + v) + w \quad : \forall u, v, w \in V$ (تجميعية)

③ $\exists\, 0 \in V \; ; \; u + 0 = u \quad : \forall u \in V$ (الحيادي)

④ $\forall u \in V , \exists -u \in V \; ; \; u + (-u) = 0$ (تناظرية)

⑤ $\alpha (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha v \; ; \; \alpha \in \mathbb{R} , \; u, v \in V$ (توزيعية)

⑥ $\alpha (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) u \; ; \; \forall \alpha , \beta \in \mathbb{R} , \; u \in V$

⑦ $1 \cdot v = v \; ; \; \forall v \in V$

تذكر :
$\forall$: أياً كان
; : حيث أن
$\exists$: يوجد

Scanned by CamScanner

⊛ أمثلة :-

1- تمثل كلاً من المجموعات $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$ فضاءات شعاعية :

2- $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$

تمثل فضاءات شعاعية .

⊛ الفضاءات الجزئية :-

- نسمي كل مجموعة جزئية $U \subseteq V$ فضاء شعاعي جزئي إذا تحققت الشروط :

① $0 \in U$ حيث نقصد ب (0) الشعاع الصفري

② $u + v \in U \,;\, \forall u, v \in U$

③ $\alpha u \in U \,;\, \forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in U$

⊛ أمثلة :

- لتكن $H = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$ حيث أن $a, b \in \mathbb{R}$ بين فيما إذا كانت H تمثل فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ ؟

(الحل) For $a = 0$ و $b = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in H$ (محقق)

$\forall u, v \in H : u = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$ و $v = \begin{bmatrix} a' \\ 0 \\ b' \end{bmatrix} \Rightarrow$

$u + v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' \\ 0 \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'' \\ 0 \\ b'' \end{bmatrix} \in H$

③ $\alpha \cdot u = \alpha \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \in H$

إن H هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ لأن الشروط الثلاثة محققة .

مثال 2:

- لتكن $H = \left\{ \begin{bmatrix} X \\ X+1 \end{bmatrix} : X \in \mathbb{R} \right\}$ هل تمثل H فضاء جزئي من $\mathbb{R}^2$ ؟

الحل: ① من أجل $X = 0$ نجد أن $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ لا يمثل الشعاع الصفري $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ أي

أن H ليس بفضاء شعاعي جزئي لأن $0 \notin H$

② $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \notin H$ أي أن H لا تمثل فضاء شعاعي جزئي

نظرية

إذا كانت $v_1, v_2, ---, v_p$ مجموعة من الأشعة من الفضاء الشعاعي فإن التراكيب الخطية لهذه الأشعة $SPAN\{v_1, v_2, ---, v_p\}$ تشكل فضاء شعاعي جزئي في الفضاء الشعاعي الكلي V :

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ---- + a_p v_p$

مثال: هل تمثل مجموعة الأشعة $V = \{(a+2b), (2a-3b) ; a, b \in \mathbb{R}\}$ فضاء شعاعي $\mathbb{R}^2$ ولماذا ؟؟

$$\begin{bmatrix} a+2b \\ 2a-3b \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

أمكن كتابة V على شكل تركيب خطي بدلالة v_1 و v_2 ⇐

V تمثل الفضاء الشعاعي الجزئي ⇐ $V = SPAN\{v_1, v_2\}$

(مثال) هل $H = \left\{ \begin{bmatrix} a+2b \\ a+1 \\ 0 \end{bmatrix} ; a,b \in \mathbb{R} \right\}$ هي فضاء شعاعي جزئي في $\mathbb{R}^3$ وضح بالتفصيل ؟؟

(الحل) عند أخذ $b = a = 0 \Leftarrow 0 \notin H$ (الخاصية الأولى خطأ حسب التعريف)

أي : يوجد أي تركيب خطي يجمع بين أشعة H وبالتالي H ليست بفضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

(تعريف) نسمي مجموعة الأشعة $\{V_1, V_2, ..., V_p\}$ قاعدة (أساس) للفضاء الشعاعي V إذا كانت هذه الأشعة مستقلة خطياً وتولد الفضاء V

(مثال) لتكن $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ هل يمكن أن تمثل $\{V_1, V_2, V_3\}$ قاعدة للفضاء $\mathbb{R}^3$ ؟؟

(الحل)

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2+R_3 \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$Z = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow X = 0$

Scanned by CamScanner

يوجد حل وحيد هو الحل الصفري ⇐ مستقلة خطياً

- بما أنه يوجد عنصر ارتكاز في المصفوفة المختزلة هذا يضمن أن أعمدة المصفوفة تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$.

وبالتالي بما أن الأشعة مستقلة خطياً وتولد الفضاء $\mathbb{R}^3$ فإن مجموعة الأشعة v_1, v_2, v_3 تمثل قاعدة الفضاء $\mathbb{R}^3$.

مثال وضح لماذا كلاً من الأشعة التالية لا تمثل قاعدة للفضاء $\mathbb{R}^3$:

a) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \right\}$

الحل : عدد المجاهيل لا يساوي عدد المعادلات

يوجد عدد غير منتهٍ من الحلول فالأشعة غير مستقلة خطياً

b) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \right\}$

الحل: عدد عناصر الارتكاز = 2 وعدد المعادلات يساوي 3 أي لا يوجد عنصر ارتكاز في كل سطر وبالتالي هذه الأشعة لا تولد هذا الفضاء وبالتالي فهي لا تصلح لتولد قاعدة الفضاء .